Exercice 1

Soit la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x^2+2x-3}{x^2-4}$.

1° $\mathscr{D} = \{x \in \mathbb{R},\ x^2-4 \neq 0\}$; $x^2-4=0 \iff (x-2)(x+2)=0 \iff \begin{cases} x=2 \\ \text{ou} \\ x=-2. \end{cases}$ donc $\mathscr{D} = \mathbb{R} - \{-2\,;\,2\}$.

2° **Calcul des limites aux bornes de $\mathscr{D}$:**

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2+2x-3}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+2x-3}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = 1$.

On en déduit que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une **asymptote horizontale** d'équation $\boxed{y=1.}$

$\lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to-2^-} \dfrac{x^2+2x-3}{x^2-4}$ $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-2^-} x^2+2-3 = -3 < 0 \\ \lim\limits_{x\to-2^-} x^2-4 = 0^+ \end{cases}$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = -\infty.}$

$\lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to-2^+} \dfrac{x^2+2x-3}{x^2-4}$ $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-2^+} x^2+2-3 = -3 < 0 \\ \lim\limits_{x\to-2^+} x^2-4 = 0^+ \end{cases}$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = +\infty.}$

On en déduit que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une **asymptote verticale** d'équation $\boxed{x=-2.}$

$\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to2^-} \dfrac{x^2+2x-3}{x^2-4}$ $\begin{cases} \lim\limits_{x\to2^-} x^2+2-3 = -3 < 0 \\ \lim\limits_{x\to2^-} x^2-4 = 0^+ \end{cases}$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = -\infty.}$

$\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to2^+} \dfrac{x^2+2x-3}{x^2-4}$ $\begin{cases} \lim\limits_{x\to2^+} x^2+2-3 = -3 < 0 \\ \lim\limits_{x\to2^+} x^2-4 = 0^+ \end{cases}$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = +\infty.}$

On en déduit que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une **asymptote verticale** d'équation $\boxed{x=2.}$

3° **Calcul de $f'(x)$.**

$f'(x) = \dfrac{(2x+2)(x^2-4) - 2x(x^2+2x-3)}{(x^2-4)^2} = \dfrac{2x^3+2x^2-8x-8-2x^3-4x^2+6x}{(x^2-4)^2} = \dfrac{-2x^2-2x-8}{(x^2-4)^2}$.

On obtient bien $f'(x) = \dfrac{-2(x^2+x+4)}{(x^2-4)^2}$.

Signe de $f'(x)$.

$f'(x)$ a le même signe que son numérateur puisque son dénominateur est un carré toujours strictement positif sur $\mathscr{D}$.

Le trinôme x^2+x+4 est strictement positif sur $\mathbb{R}$ car le discriminant Δ est négatif ($\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 4 = -15$) et le coefficient de x^2 est positif. $f'(x)$ est donc **strictement négative** sur $\mathscr{D}$.

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	||	$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	1

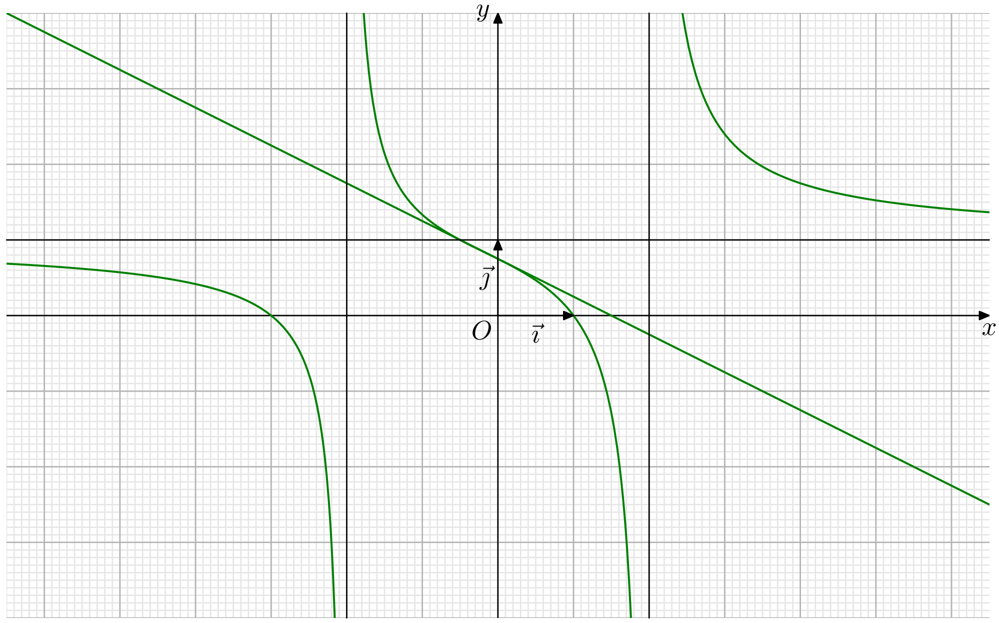
4° La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point I d'abscisse 0 a pour équation : $y' = f'(0)(x-0) + f(0) \iff \boxed{y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{4}.}$

5° Les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses vérifient le système : $\begin{cases} y = f(x) \\ y = f(0). \end{cases}$

donc $f(x) = 0 \iff x^2+2x-3 = 0 \iff (x-1)(x+3) = 0 \iff \begin{cases} x=1 \\ \text{ou} \\ x=-3. \end{cases}$

Il y a donc deux points d'intersection qui ont pour coordonnées $\boxed{(1\,;\,0)}$ et $\boxed{(-3\,;\,0).}$

6° Voici la courbe et sa tangente à l'origine.



Exercice 2

1° Sachant que I est le milieu de $[BN]$, on a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AI}$.

2°

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{CM} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AN}) \cdot \overrightarrow{CM} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{CM} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{CA}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{CM} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2 + 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CA} \\ &= \frac{1}{2}(2AB^2 - 2AC^2) \\ &= AB^2 - AC^2 \\ &= 0 \text{ d'après Pythagore.}\end{aligned}$$

$\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{CM} = 0 \iff \overrightarrow{AI} \perp \overrightarrow{AM}$. La droite (AI) est donc perpendiculaire à la droite (CM) et

$\boxed{\text{la droite } (AI) \text{ est la hauteur du triangle } AMC.}$

Exercice 3

Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{2 + 3u_n}$.

1° a.

$$\begin{aligned}u_1 &= \frac{2u_0}{2+3u_0} \\ &= \frac{2}{2+3} \\ &= \frac{2}{5}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u_2 &= \frac{2u_1}{2+3u_1} \\ &= \frac{2 \times \frac{2}{5}}{2 + 3 \times \frac{2}{5}} \\ &= \frac{4/5}{2+6/5} \\ &= \frac{4/5}{16/5} = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u_3 &= \frac{2u_2}{2+3u_2} \\ &= \frac{2 \times \frac{1}{4}}{2 + 3 \times \frac{1}{4}} \\ &= \frac{1/2}{2+3/4} \\ &= \frac{1/2}{11/4} = \frac{2}{11}\end{aligned}$$

$\boxed{u_1 = \frac{2}{5}}$ $\boxed{u_2 = \frac{1}{4}}$ $\boxed{u_3 = \frac{2}{11}}$

b. $\boxed{u_{20} \approx 0{,}0322.}$

c. Calculons : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2u_n}{2+3u_n} - u_n = \dfrac{2u_n}{2+3u_n} - \dfrac{2u_n + 3u_n^2}{2+3u_n} = \dfrac{-3u_n^2}{2+3u_n}$.
Cette différence n'est pas constante donc la suite (u_n) **n'est pas une suite arithmétique.**

Calculons : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\dfrac{2u_n}{2+3u_n}}{u_n = \dfrac{1}{2+3u_n}}$.

Ce quotient n'est pas constant donc la suite (u_n) **n'est pas une suite géométrique.**

2° Si $u_{n+1} = 0$ alors $\dfrac{2u_n}{2+3u_n} = 0$ donc $2u_n = 0 \iff u_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Or $u_0 = 1$, donc c'est impossible et les termes de la suite (u_n) ne s'annulent jamais.

3° Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$ et on définit pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 1 + \dfrac{2}{u_n}$.

a. $v_1 = 1 + \dfrac{2}{u_1} = 1 + \dfrac{2}{1} = 3$; $v_2 = 1 + \dfrac{2}{u_2} = 1 + \dfrac{2}{1/4} = 1 + 8 = 9$; $v_3 = 1 + \dfrac{2}{u_3} = 1 + \dfrac{2}{2/11} = 1 + 11 = 13$.

$\boxed{v_1 = 6}$ $\boxed{v_2 = 9}$ $\boxed{v_3 = 13}$

b. On sait que $v_{n+1} = 1 + \dfrac{2}{u_{n+1}}$ donc $v_{n+1} = 1 + \dfrac{2}{\dfrac{2u_n}{2+3u_n}} = 1 + \dfrac{2(2+3u_n)}{2u_n} = 1 + \dfrac{2+3u_n}{u_n} = 1 + \dfrac{2}{u_n} + 3$ et

$v_{n+1} = v_n + 3$.

$\boxed{\text{Puisque pour tout } n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = v_n + 3}$, la suite (v_n) est donc une suite arithmétique de $\boxed{\text{raison } r = 3}$ et de premier terme $\boxed{v_0 = 1 + \dfrac{2}{u_0} = 1 + 2 = 3.}$

c. D'après le cours, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 + nr = 3 + 3n$ donc $v_n = 3(n+1)$.

$v_n = 1 + \dfrac{2}{u_n} \iff v_n - 1 = \dfrac{2}{u_n} \iff u_n = \dfrac{2}{v_n - 1}$ donc $\boxed{u_n = \dfrac{2}{3n+2}}$.

4° La suite (v_n) étant une suite arithmétique de raison $3 \neq 0$ **n'est pas convergente** : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty.}$

La suite (u_n) elle, **est une suite convergente** car $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{3n+2} = 0.}$

5° D'après le cours, $S = v_0 + v_1 + \ldots + v_n = (n+1)\dfrac{v_0 + v_n}{2} = (n+1)\dfrac{3+3n+3}{2}$ donc $\boxed{S = \dfrac{(n+1)(3n+6)}{2}.}$

Exercice 4

$AB = 5$, $BC = 6$ et $AC = 7$. I est le milieu de $[AB]$.

1° A' barycentre de $(B\,,1)$ et $(C\,,-3)$ donc $\overrightarrow{A'B} - 3\overrightarrow{A'C} = \overrightarrow{0} \iff \overrightarrow{BA'} = \dfrac{-3}{1-3}\overrightarrow{BC} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{BC}$ donc $\boxed{\overrightarrow{BA'} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{BC}.}$

2° $\overrightarrow{AB'} = \dfrac{9}{7}\overrightarrow{AC} \iff 7\overrightarrow{AB'} - 9\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{0} \iff 7\overrightarrow{AB'} - 9(\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{B'C} = \overrightarrow{0} \iff 2\overrightarrow{B'A} - 9\overrightarrow{B'C} = \overrightarrow{0}$ donc

$\boxed{\boldsymbol{B'} \textbf{ est barycentre de } \boldsymbol{(A\,,2)} \textbf{ et } \boldsymbol{(C\,,-9).}}$

3° Soit G le barycentre de $(A\,,2)$, $(B\,,3)$ et $(C\,,-9)$ donc $2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} - 9\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$.

a. D'après le 1° on sait que : $\overrightarrow{GB} - 3\overrightarrow{GC} = -2\overrightarrow{GA'}$, donc $3\overrightarrow{GB} - 9\overrightarrow{GA'} = -6\overrightarrow{GA'}$

d'où $2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} - 9\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0} \iff 2\overrightarrow{GA} - 6\overrightarrow{GA'} = \overrightarrow{0}$

donc G est barycentre de $(A\,,2)$ et $(A'\,,-6)$ ou de $(A\,,1)$ et $(A'\,,-3)$ donc $G \in (AA')$.

D'après le 2° on sait que : $2\overrightarrow{GA} - 9\overrightarrow{GC} = -7\overrightarrow{GB'}$, donc $2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} - 9\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0} \iff 3\overrightarrow{GA} - 7\overrightarrow{GA'} = \overrightarrow{0}$

donc G est aussi barycentre de $(B\,,3)$ et $(B'\,,-7)$ et $G \in (BB')$.

On en conclut que $\boxed{\boldsymbol{G} \textbf{ est l'intersection des droites } \boldsymbol{(AA')} \textbf{ et } \boldsymbol{(BB').}}$

b. Soit C' l'intersection des droites (CG) et (AB).

Soit G' le barycentre de $(A\,,2)$ et $(B\,,3)$, alors $\boxed{\boldsymbol{G' \in (AB).}}$

Sachant que G est barycentre de $(A\,,2)$, $(B\,,3)$ et $(C\,,-9)$, alors G sera également le barycentre de $(G'\,,5)$ et $(C\,,-9)$, donc G, G' et C sont alignés, d'où $\boxed{\boldsymbol{G' \in (GC).}}$

On en déduit que G' est l'intersection des droites (CG) et (AB). donc C' est confondu avec G'.

$\boxed{\boldsymbol{C'} \textbf{ est donc le barycentre de } \boldsymbol{(A\,,2)} \textbf{ et } \boldsymbol{(B\,,3)}}$, d'où $m = 2$ et $n = 3$.

4° $(2\overrightarrow{NA}+3\overrightarrow{NB}-9\overrightarrow{NC})\cdot\overrightarrow{AB}=10 \iff -4\overrightarrow{NG}\cdot\overrightarrow{AB}=10 \iff \overrightarrow{NG}\cdot\overrightarrow{AB}=-\dfrac{5}{2}$.

Appelons H le point projeté orthogonalement de G sur (AB) et M le point projeté orthogonalement de N sur (AB), on obtient alors : $\overrightarrow{MH}\cdot\overrightarrow{AB}=-\dfrac{5}{2}$.

Le produit scalaire étant négatif, les vecteurs sont de sens contraire et :

$$MH\times AB=\frac{5}{2} \iff MH=\frac{5}{2\,AB}=\frac{2}{2\times 5}=\frac{1}{2}.$$

L'ensemble des points N est donc la droite perpendiculaire à (AB) passant par le point M tel que $MH=\dfrac{1}{2}$ et les vecteurs $\overrightarrow{MH}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont de sens contraires.

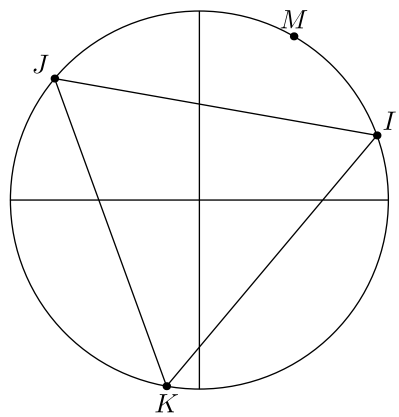
Exercice 5

1° $2\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)=2\left(\cos 2x\cos\dfrac{\pi}{3}+\sin 2x\sin\dfrac{\pi}{3}\right)=2\left(\dfrac{1}{2}\cos 2x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x\right)$

donc $\boxed{\mathbf{2\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x.}}$

2°

$$\begin{aligned}
\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x=2\cos x &\iff 2\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=2\cos x\\
&\iff \cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos x\\
&\iff \begin{cases} 2x-\dfrac{\pi}{3} = x+2k\pi\\ \text{ou}\\ 2x-\dfrac{\pi}{3} = -x+2k\pi\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} 2x-x = \dfrac{\pi}{3}+2k\pi\\ \text{ou}\\ 2x+x = \dfrac{\pi}{3}+2k\pi\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3}+2k\pi\\ \text{ou}\\ 3x = \dfrac{\pi}{3}+2k\pi\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3}+2k\pi\\ \text{ou}\\ x = \dfrac{\pi}{9}+\dfrac{2k\pi}{3}\end{cases}
\end{aligned}$$



Il y a en tout 4 solutions : $\dfrac{\pi}{9}$, $\dfrac{\pi}{3}$, $\dfrac{\pi}{9}+\dfrac{2\pi}{3}$ et $\dfrac{\pi}{9}+\dfrac{4\pi}{3}$ qui correspondent aux points I, M, J et K.